Rudimentos del cálculo tensorial y el estudio de la curvatura en geometría Pseudo-Riemmanniana

MATEO PRECIADO ESTRADA
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
TOMÁS MEJÍA GÓMEZ
JHONS HOPKINS UNIVERSITY

2024

Pregrado de Astronomía, Universidad de Antioquia.
mateo.preciado@udea.edu.co

Este es un documento que recopila las lecturas dirigidas hechas en cálculo tensorial por medio del programa de Pares Ordenados en la primavera 2024.

Primer lanzamiento, — 2024.

Índice general

Capítulo 1

Motivación

”La mente intuitiva es un regalo sagrado y la mente racional una sirviente fiel. Hemos creado una sociedad que honra a los sirvientes y que ha olvidado los regalos.”
— ***Albert Einstein***
(1879-1955)

El cálculo tensorial no es solo una rama avanzada de las matemáticas o la puerta a comprender otras como la topología, geometría diferencial o la relatividad general. Es una herramienta que proporciona una comprensión mucho más profunda en temas que pueden ser complejos. Adicional a esto, el lenguaje que nos proporciona simplifica y eleva la elegancia con la que la matemática se presenta en el universo.

Algunas de las motivaciones principales por las que el cálculo tensorial es relevante, no solo como herramienta matemática sino en aplicaciones directas pueden ser las siguientes:

1. **Teoría general de la relatividad:**

   - En la teoría desarrollada por Einstein, los tensores son el lenguaje usual con el que se describen gran parte de universo, en este caso la descripción de la curvatura del *espacio-tiempo*, el tensor de Riemmann o incluso el tensor métrico que permea gran parte de la matemática avanzada y con el cual podemos lograr generalizaciones incluso para operadores diferenciales. Los mismo que están presentes en cálculo de varias variables.

2. **Mecánica de sólidos:**

   - En la teoría de la elasticidad, el uso de tensores es crucial para la representación de las deformaciones y tensiones en materiales. Podemos ejemplificar esto por medio del tensor de tensión y el de deformación.

3. **Mecánica de fluidos:**

- En casos para los que se necesita una descripción de las fuerzas internas para la dinámica de un fluido, el tensor de estrés de Cauchy es el responsable de esta definición ($[T_C]_{xyz}$).

4. **Electromagnetismo**

   - Esta es una teoría sumamente hermosa por la forma compacta y simétrica con la cual se describe la naturaleza de la luz. Esto se logra usando la simplicidad del tensor de campo electromagnético ($F^{\mu\nu}$) logrando no solo lo anterior sino también elegancia en su expresión matemática.

5. **Geometría diferencial:**

   - El cálculo tensorial resulta ser fundamental como herramienta matemática. En este caso permite describir propiedades geométricas intrínsecas de las variedades diferenciales.

Capítulo 2

Tópicos tensoriales

“No todo lo que es oro reluce,
ni toda la gente errante anda
perdida”
— J. R. R. Tolkien

El concepto de tensor surge de la necesidad de extender las ideas de vectores y matrices a situaciones aún más generales, incluida la necesidad de adicionar dimensiones para estás situaciones. Los primeros desarrollos para llegar a lo que conocemos como calculo tensorial se remonta al trabajo de dos matemáticos italianos Gregorio Ricci-Curbastro y su estudiante Tullio Levi-Civita. Esto bajo la necesidad de tener una herramienta para la geometría diferencial, resultando ser esencial para la formulación de la teoría de la relatividad general de Albert Einstein.

2.1. Espacio N-dimensional

Tenemos la noción del espacio 3-dimensional que resulta ser muy cómodo y usual para los cálculo matemáticos. Sin embargo bajo la necesidad de expandir el concepto de dimensión llegamos al espacio N-dimensional E_N para el cual solo definimos un grupo de N variables $x^i, i = 1, 2, 3, ...N$, relativos a un punto $P(x^i) \in E_N$, relacionado a un sistema de coordenadas X^i.

Este espacio E_N se llama espacio afín, y este está relacionado directamente con la noción de distancia entre dos puntos, lo que nos lleva a la definición de métrica del espacio.

2.2. Notación de Einstein

En el cálculo de expresiones complejas en términos de sus elementos, resulta conveniente hacer de la notación no solo elegante sino también simple. Albert Einstein introdujo una notación que nos permite abreviar la escritura de las sumatorias, suprimiendo el símbolo.

Definición 2.1: Convenio de suma

ada una expresión lineal en $\mathbb{R}^n$ en la que se escriben todos sus términos en forma explicita:

$$w = a_1 w^1 + a_2 w^2 + a_3 w^3 + ... + a_n w^n$$

Lo que se puede reescribir en términos de la sumatoria como

$$\sum_{j=1}^{n} a_j w^j$$

la finalidad de la nueva notación es simplemente escribir la expresión anterior de la siguiente forma evitando usar el símbolo de suma, es decir.

$$w = a_1 w^1 + a_2 w^2 + a_3 w^3 + ... + a_n w^n = a_j w^j$$

Ejemplo 2.1: Simplicidad y elegancia

Usar la notación Einstein para reescribir estas dos expresiones.

$$ds^2 = g_{11}\left(dx^1\right)^2 + g_{22}\left(dx^2\right)^2 + g_{33}\left(dx^3\right)^2$$
$$\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq} dx^p dx^q$$

Usando la notación, las dos expresiones anteriores toman la siguiente forma.

$$ds^2 = g_{kk} dx^k dx^k$$
$$g_{pq} dx^p dx^q$$

2.3. Tensor

Una definición técnica de tensor es la siguiente

Definición 3.1: Tensor

Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Un tensor de tipo (r, s) sobre V es una aplicación multilineal $T : V^* \times V^* \times \cdots \times V^* \times V \times V \times \cdots \times V \to \mathbb{K}$, donde

V^* denota el espacio dual de V, que satisface ciertas propiedades de simetría y antisimetría en sus argumentos.

En otras palabras, un tensor es la generalización de objetos matemáticos familiares como lo son los escalares, vectores y matrices en múltiples dimensiones y sistemas coordenados.

2.4. Rango

Se denomina el rango de un tensor S al número de grados de libertad que este posee en forma de índices.

Ejemplo 4.1: Clasificaciones

Clasificaciones de objetos matemáticos

- Los tensores de rango 0 son los escalares, pues solo es una componente.
- Los vectores S_i son tensores de rango 1, pues tienen un único grado de libertad y n componentes.
- Los tensores de rango 2 pueden verse como matrices y las representamos de esta forma S_{ij}.

2.5. Delta de Kronecker y simbolo de Levi-Civita

Definición 5.1: Delta de Kronecker

El delta de Kronecker, denotado como δ_{ij}, es una función que toma dos índices, i y j, y devuelve 1 si $i = j$ y 0 en caso contrario. Matemáticamente, se define como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ejemplo 5.1: Uso

Este tensor presenta simetría, es decir $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. La delta de Kronecker es el tensor identidad. Podemos usar el tensor como un operador lineal en desarrollos algebraicos, tales como

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\delta_{ki} = \frac{\partial x^k}{\partial x^j}$$
$$S_{ij}\delta^{ik}u^k = S_{kj}u^k = S_j$$

Definición 5.2: Símbolo de Levi-Civita

l símbolo de Levi-Civita, denotado como ϵ_{ijk}, es un símbolo tensorial completamente antisimétrico en sus índices. Se define como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j,k) \text{ es una permutación par de } (1,2,3), \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ es una permutación impar de } (1,2,3), \\ 0 & \text{si dos o más de los índices son iguales.} \end{cases}$$

El símbolo de Levi-Civita es fundamental en muchas áreas de las matemáticas y la física, como la teoría de la relatividad, la mecánica cuántica y el análisis vectorial.

Ejemplo 5.2: Identidad vectorial

Demostrar la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \left[\nabla \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)\right]_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}(A \times B)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\epsilon_{ijk}A_jB_k \\ &= \epsilon_{ijk}B_k\frac{\partial A_j}{\partial x_i} + \epsilon_{ijk}A_j\frac{\partial B_k}{\partial x_i} \\ &= B_k\epsilon_{ijk}\frac{\partial A_i}{\partial x_i} - A_i\epsilon_{ijk}\frac{\partial B_k}{\partial x_i} \\ &= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3: Identidad vectorial

Demostrar la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \times (\varphi \nabla \varphi) = 0$$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
[\nabla \times (\varphi \nabla \varphi)]_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} [\varphi \nabla \varphi]_k \\
&= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \\
&= \epsilon_{ijk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \varphi \epsilon_{ijk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j \partial x_k} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Vemos entonces la elegancia y potencia de usar la notación de suma de Einstein al igual que usar el símbolo de Levi-Civita. Simplifica los cálculos en muchos casos donde hacerlo usando coordenadas rectangulares puede ser un suplicio.

2.6. Ley de transformación

La ley de transformación covariante y contravariante muestra cómo las componentes de un tensor covariante y contravariante cambian al pasar de un sistema de coordenadas a otro.

La representación de un tensor en un sistema coordenado se denota por la posición en la cual se ponen los índices. En este caso tenemos dos maneras de expresar esto por medio de dos tipo de componentes.

2.6.1. Tensores covariante

Un tensor covariante es una entidad matemática que transforma según la ley de transformación covariante. Es decir.

$$\bar{S}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} S_i$$

2.6.2. Tensores contravariante

Un tensor contravariante es una entidad matemática que transforma según la ley de transformación contravariante. Es decir.

$$\bar{S}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} S^i$$

Estos casos se pueden extrapolar para el caso donde tenemos tensores covariantes y contravariantes. Estos se denominan mixtos y al igual que los anteriores pueden ser de mayor rango. En el siguiente ejemplo será de rango 2 y transforma de la siguiente manera.

$$S^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} S^k_j$$

Ejemplo 6.1: Tensor mixto

Escribir la ley de transformación para el siguiente tensor: S^i_{jk}.

Para este caso tenemos que la ley de transformación de las coordenadas X^i a $\bar{X}^i$ es la siguiente.

$$\bar{S}^p_{qr} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} S^i_{jk}$$

2.7. Operaciones

2.7.1. Multiplicación de un tensor por un escalar

Esta múltiplicación nos provee nuevamente un tensor como resultado, cuyas componentes son las mismas del original multiplicadas por el escalar.

$$S_{ijk} = \alpha T_{ijk}$$

esta última representación es de utilidad para demostrarlo usando la ley de transformación que vimos anteriormente para tensores covariantes.

2.7.2. Adición y sustracción

La adición y sustracción de tensores del mismo rango (orden), nos da como resultado un mismo tipo de tensor con el mismo orden. Por ejemplo tenemos el caso de un tensor mixto:

$$S^k_{ij} = D^k_{ij} \pm B^k_{ij}$$

La suma o sustracción anterior de dos tensores mixtos nos da como resultado un tensor mixto de tercer orden, dos veces covariante y una contravariante.

2.7.3. Contracción de índices

La contracción de índices en un tensor se da cuando dos de los índices de este son iguales, uno covariante y otro contravariante. Esto hace que el orden del tensor se vea reducido en el orden. Por ejemplo el tensor S^{kl}_{ij} podemos contraer el índices l y j, como resultado tenemos:

$$S^{il}_{kj} = S^{kj}_{ij} = S^{k}_{i}$$

2.7.4. Producto externo de tensores

El producto externo de dos tensores nos provee un nuevo tensor, el cual tiene un orden que es igual a la suma del orden de los dos anteriores. Por ejemplo el tensor $S^{k\cdots}_{ij\cdots}$ con orden (p,q) y el tensor $M^{\cdots lm}_{\cdots rs}$ con orden (u,v). Tenemos entonces que el producto $A^{k\ldots lm}_{ij\ldots rs} = S^{k\cdots}_{ij\ldots}M^{\cdots lm}_{\ldots rs}$ lo que nos da un orden $(p+u, q+v)$. El orden del tensor está dado por la suma de estos dos índices.

2.7.5. Producto interno de tensores

El producto interno de dos tensores está definido como un tensor obtenido después de la contracción de el producto externo de estos tensores. Sea A_{ij} y B^{l}_{k}, con el producto externo $P^{l}_{ijk} = A_{ij}B^{l}_{k}$ que nos da como resultado un tensor de orden 4. Si contraemos los índices l y k nos da el producto interno $P^{l}_{ijk} = A_{ij}B^{l}_{l} = P_{ij}$.

2.7.6. Ley del cociente

Esta la ley nos permite verificar si un grupo de funciones de un sistema coordenado X^i tiene características tensoriales. Esta aplicación nos sirve para comprobar que un objeto tiene naturaleza tensorial.

Definimos el objeto $A(i,j,k)$ compuesto de 27 funciones definidas en el espacio E_N. Usando la definición del producto interno y aplicando la definición de la ley de transformación vemos que.

$$\bar{B}^{pq} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}B^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}A(i,j,k)T^k$$

Ahora como

$$T^k = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r}\bar{T}^r$$

Por sustitución tenemos

$$\bar{B}^{pq} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r}A(i,j,k)\bar{T}^r$$

En un nuevos sistema coordenado el tensor está dado por

$$\bar{B}^{pq} = \bar{A}(p,q,r)\bar{T}^r$$

Se sigue por sustitución que:

$$\left[\bar{A}(p,q,r) - \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r}A(i,j,k)\right]\bar{T}^r = 0$$

Como $\bar{T}^r$ es un vector arbitrario, se sigue que.

$$\bar{A}(p,q,r) = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r}A(i,j,k)$$

Lo que nos da que $A(i,j,k)$ es de naturaleza tensorial de orden 4. Y la anterior es la ley de transformación de la misma. Contravariante de orden 3 y covariante de orden 1.

2.8. El Tensor Métrico

El tensor métrico es una herramienta fundamental en la teoría de la relatividad general y en la geometría diferencial. Se denota comúnmente por $g_{\mu\nu}$ y proporciona una manera de medir distancias y ángulos en un espacio plano y con curvatura.

2.8.1. Definición

El tensor métrico $g_{\mu\nu}$ es un objeto matemático que nos permite obtener una descripción del sistema coordenado o de la variedad diferencial. Sus componentes describen las longitudes y los ángulos entre los vectores base. En coordenadas locales, se expresa como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

donde ds es el elemento de longitud (intervalo) y dx^μ son los diferenciales de las coordenadas.

2.8.2. Propiedades del Tensor Métrico

1. Simetría: El tensor métrico es simétrico, es decir, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

2. Invertibilidad: Existe un tensor inverso $g^{\mu\nu}$ tal que $g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu$, donde δ^ρ_μ es el delta de Kronecker.

3. Signatura: La signatura del tensor métrico (el signo de sus autovalores) define la naturaleza del espacio. En relatividad general, la métrica tiene una signatura $(-+++)$ o $(+---)$.

4. $det g_{\nu\mu} = g \neq 0, g_{\nu\mu}$ no es singular.

5. $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$ es invariante bajo el cambio de sistema coordenado.

2.8.3. Ejemplos de Tensores Métricos

Métrica de Minkowski

En la relatividad especial, el espacio-tiempo plano está descrito por la métrica de Minkowski:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta métrica se utiliza en el espacio-tiempo plano y tiene la signatura $(-+++)$. El intervalo se escribe como:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Métrica de Schwarzschild

Para un espacio-tiempo alrededor de una masa esféricamente simétrica no rotante, se utiliza la métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \, d\Omega^2$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2$ es el elemento de longitud en una esfera de radio r.

Capítulo 3

Derivada covariante

"Si te dan un papel pautado,
escribe por detrás."
—Ray Bradbury, Fahrenheit 451

3.1. Símbolo de Christoffel

El símbolo de Christoffel, también conocido como conexión de Levi-Civita, es una herramienta fundamental en la geometría diferencial y la relatividad general. Describe cómo los vectores cambian a lo largo de una curva en un espacio curvado y es esencial para definir la derivada covariante.

3.1.1. Definición

Con respecto a una sistema de coordenadas X^i, podemos ver que el diferencial total de el vector de posición $\mathbf{r}$:

$$dr = \mathbf{r}_{,i} d\bar{x}^j$$

Por medio de esta definición, podemos establecer que los vectores de un sistema de coordenadas curvilineas tiene la forma:

$$g_i = \mathbf{r}_{,i}$$

Aplicando la derivada a la expresión anterior llegamos a que

$$g_{k,l} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^l} g_j$$

Definimos entonces la siguiente variedad

$$\Gamma^j_{kl} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^l}$$

Lo anterior se conoce como el símbolo de chritoffel de segunda especie.

Haciendo un tratamiento algebraíco y tras muchos calculos, podemos llegar a la definición del símbolo de Christoffel de primera especie.

$$\Gamma_{ip,k} = \frac{1}{2}\left(g_{pi,i} + g_{ki,p} - g_{ip,k}\right)$$

3.1.2. Ley de transformación del símbolo de primera especie

Sea $\Gamma_{pq,r}$ definido en el sistema de coordenadas X^i y $\bar{\Gamma}_{ij,k}$ expresado en el sistema $\bar{X}^i$, ahora usando la definición del símbolo de primera especie, podemos llegar a que la ley de transformación tiene la siguiente forma.

$$\bar{\Gamma}_{ij,k} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\Gamma_{pq,r} + g_{pq}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}$$

Vemos entonces que por medio de la última ecuación por el hecho de tener un termino adicional como lo es $g_{pq}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}$ nos dice que el símbolo no es de naturaleza tensorial.

3.2. Identidad de Ricci

Una manera de ayudarse con el cálculo de expresiones es usando la definición de las identidades de Ricci que se calculando por medio del símbolo de primera especie.

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ji,k} + \Gamma_{ki,j}$$
$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{kj,i} - \Gamma_{ij,k}$$

Estas dos identidades se usan para simplificar cálculos.

Ejemplo 2.1

Sí T^{ij} y g_{ik} son las componentes de un tensor simétrico y el tensor métrico, respectivamente. Mostrar que

$$T^{jk}\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}T^{jk}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$$

con la identidad de Ricci

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ji,k} + \Gamma_{ki,j}$$
$$\frac{1}{2}T^{jk}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \frac{1}{2}T^{jk}\left(\Gamma_{ji,k} + \Gamma_{ki,j}\right)$$

$$\frac{1}{2}T^{jk}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = T^{jk}\Gamma_{ji,k}$$

3.2.1. Propiedades

1. Simetría en los índices inferiores:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$$

Esto implica que los símbolos de Christoffel son simétricos en los dos últimos índices.

2. No es un Tensor: Aunque los símbolos de Christoffel son fundamentales en la definición de la derivada covariante, ellos mismos no transforman como un tensor bajo un cambio general de coordenadas.

3.2.2. Ejemplo:

Ejemplo 2.2: Símbolos de Christoffel para la métrica esférica

Consideremos la métrica esférica en coordenadas (t, r, θ, ϕ):

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2$$

Los símbolos de Christoffel no nulos para esta métrica incluyen:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^r_{\theta\theta} = -r & \Gamma^r_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta & \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta & \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r} & \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta \end{array}$$

Estos símbolos se derivan utilizando la fórmula de definición en términos de la métrica.

3.3. Derivada covariante

3.4. La Derivada Covariante

La derivada covariante es una extensión de la noción de derivada que es compatible con la estructura geométrica de un espacio curvo. Permite definir cómo los vectores y los tensores cambian a lo largo de una curva en un espacio curvo, manteniendo la invariancia bajo cambios de coordenadas.

3.4.1. Definición

La derivada covariante de un vector V^ν en la dirección de la coordenada x^μ se denota por $\nabla_\mu V^\nu$ y se define como:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda$$

donde $\partial_\mu V^\nu$ es la derivada parcial ordinaria y $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ son los símbolos de Christoffel de segunda especie.

Para un covector V_ν, la derivada covariante se expresa como:

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda$$

3.4.2. Propiedades

1. Linealidad: La derivada covariante es lineal en sus argumentos.

$$\nabla_\mu (aV^\nu + bW^\nu) = a\nabla_\mu V^\nu + b\nabla_\mu W^\nu$$

2. Regla del producto: Satisface una regla del producto análoga a la regla del producto para derivadas ordinarias.

$$\nabla_\mu (V^\nu U^\lambda) = (\nabla_\mu V^\nu) U^\lambda + V^\nu (\nabla_\mu U^\lambda)$$

3. 3. Compatibilidad con la métrica: La derivada covariante de la métrica es cero.

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$$